Grad – div – rot

Vorbemerkungen

Häufig beschränkt man sich bei der Darstellung von Sachverhalten – insbesondere in der Schulphysik - auf eine eindimensionale Schreibweise, um den zu erarbeitenden Inhalt nicht noch zusätzlich durch mathematischen Ballast aufzuladen.
So werden Wellen vorzugsweise mit einer (Orts-)Variable x für die Ausbreitung (neben einer Zeitabhängigkeit) beschrieben, wohl wissend, dass sich z.B. Wasserwellen (an der Oberfläche) zweidimensional oder elektromagnetische Wellen räumlich (Variablen x, y, z) ausbreiten. Oder im Fall von kugelsymmetrischen Beispielen gelingt durch den Übergang zu Kugelkoordinaten die Ausbreitung durch den Abstand r.
Will man die Beschreibung verallgemeinern f(x,y,z) – Stichwort: mehrdimensionale Funktionen - oder auch eine Zeitabhängigkeit der räumlichen Koordinaten berücksichtigen – also f(t, x(t), y(t), z(t)), verwendet man das Konzept der partiellen Ableitungen.

Hilfreich sind die Begriffe skalare Funktion und Vektorfunktion.

Skalare Funktion und Vektorfunktion

Der Funktionswert einer skalaren Funktion ist eine Zahl, bei einer Vektorfunktion ist es ein Vektor:

skalare Funktion: f: (x, ...) → Zahl
Vektorfunktion: f: (x, ...) → $\vec{v}$

Beispielfunktionen:

skalar:	$f(x) = 7 \cdot x$	$f((x,y) = 3 \cdot x^2 - 7 \cdot y$	$f(x,y,z) = z + 2 \cdot x^2 - 7 \cdot y \cdot z$
Vektorfkt:	$f(x) = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}$	$f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ y \end{pmatrix}$	$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 3xz^2 - 3 \end{pmatrix}$

Beispielanwendungen:

Das Potential P ist eine skalare Funktion. Man gibt das Potential (bezogen auf einen Bezugspunkt) durch eine Zahl (mit Einheit) an. In einem Raumpunkt (x,y,z) sei das elektrische Potential durch die Funktion $f(x,y,z) = 3x - y + z^2$ gegeben.
Dann ist das Potential im Raumpunkt Q(2/-1/1): f(2,-1,1) = 8 V.

Will man das elektrische Feld $\vec{E}$ in einem Raumpunkt (x_1,y_1,z_1) angeben, benötigt man außer dem Betrag des elektrischen Feldes noch die Angabe der Richtung des elektrischen Feldes. In diese Richtung würde sich eine Probeladung bewegen.

Es sei die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ durch die Funktion f(x,y,z) = $\begin{pmatrix} x \\ y-x \\ x \cdot z \end{pmatrix}$ gegeben.

Dann ist f(2,-1,1) = $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Den Betrag der Feldstärke in dem Punkt erhält man durch den Betrag des Vektors:

$|\vec{E}(2,-1,1)| = \sqrt{2^2+(-3)^2+2^2} = \sqrt{17}\,\frac{N}{C}$.

Die partielle Ableitung

Gegeben sei eine Funktion f, die von zwei Variablen x und y abhängig ist:

Beispiel: . f(x,y) = 2xsin(y) + 3x²y

Die partielle Ableitung nach einer dieser Variablen erhält man, indem man alle anderen Variablen als konstant betrachtet und die Funktion nach der einen ausgewählten Variablen differenziert. Um anzudeuten, dass es sich nur um eine partielle Ableitung handelt, schreibt man $\frac{\delta}{\delta x}$ statt $\frac{d}{dx}$.

Die partiellen Ableitung einer Funktion f nach der Variablen x schreibt man kürzer: f_x.

Im angegebenen Beispiel wären also die partiellen Ableitungen nach x und nach y:

$$\frac{\delta f}{\delta x} = f_x = 2\sin(y) + 6xy$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = f_y = 2x\cos(y) + 3x^2$$

Analog für mehr als zwei Variable.

Vektoroperationen

Da man mit dem Nabla-Operator (fast) wie ein Vektor rechnen kann, nachfolgend die prinzipiellen Vektoroperationen:

S-Multiplikation: R x V → V

Vektor multipliziert mit einem Skalar

$\lambda \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \lambda \cdot x_3 \end{pmatrix}$ mit λ ϵ R , v ϵ V

hier: dreidimensionaler Vektor

Es gelten Assoziativgesetze sowie Kommutativgesetz.

Skalarprodukt: V x V → R

Vektor multipliziert mit einem Vektor ergibt Skalar

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3$$

hier: dreidimensionale Vektoren
Es gilt das Kommutativgesetz.

Vektorprodukt: V x V → V
Vektor multipliziert mit einem Vektor ergibt Vektor

$$\vec{a}\,x\,\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2\cdot b_3 - a_3\cdot b_2 \\ a_3\cdot b_1 - a_1\cdot b_3 \\ a_1\cdot b_2 - a_2\cdot b_1 \end{pmatrix}$$

definiert nur für dreidimensionale Vektoren
Es gilt das Anti-Kommutativgesetz $\vec{a}\,x\,\vec{b} \quad -\vec{b}\,x\,\vec{a}$

Gesetzmäßigkeiten für $\lambda, \mu \in$ IR , $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$

gemischte Assoziativgesetze:
$$(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{a} = \lambda\cdot(\mu\cdot\vec{a})$$
$$(\lambda\cdot\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$$
$$(\lambda\cdot\vec{a})\,x\,\vec{b} = \lambda\cdot(\vec{a}\,x\,\vec{b})$$

Distributivgesetze:
$$(\lambda+\mu)\cdot\vec{a} = \lambda\cdot\vec{a}+\mu\cdot\vec{a}$$
$$\lambda\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\cdot\vec{a}+\lambda\cdot\vec{b}$$

Kommutativgesetze:
$$\lambda\cdot\vec{a} = \vec{a}\cdot\lambda$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

(Anti) ´´´´ $\vec{a}\,x\,\vec{b} = -\vec{b}\,x\,\vec{a}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |(\vec{a})|\cdot|(\vec{b})|\cos(\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}))$ also $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$

$|(\vec{a}\,x\,\vec{b})| = |(\vec{a})|\cdot|(\vec{b})|\sin(\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}))$ und $\vec{a}\,x\,\vec{b} \perp \vec{a},\vec{b}$

$|\vec{a}\,x\,\vec{b}|$ gibt den Flächeninhalt des durch die Vektoren $\vec{a}\,und\,\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms an.

Spatprodukt $\vec{a}\cdot(\vec{b}\,x\,\vec{c}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\,x\,\vec{b}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\,x\,\vec{a})$

Der Nabla-Operator

Will man Ableitungen von Funktionen mit mehr als einer Variablen beschreiben, leistet der Nabla-Operator ∇ (genauer $\vec{\nabla}$) gute Dienste. Er ist ein Vektor, dessen Komponenten die partiellen Differentialoperatoren sind.

Speziell für den Fall dreier Variablen gilt: $\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta z} \end{pmatrix}$.

Gradient

Der Gradient wird auf ein Skalarfeld bzw. eine skalare Funktion f angewendet. Das Ergebnis ist ein Vektorfeld $\vec{V}$: grad f = $\nabla f = \vec{V}$

Die Funktion f ordnet jedem Punkt des Raumes (im dreidimensionalen Fall) einen Wert zu, wie oben angegeben beispielsweise ein Potential. ∇f ordnet einem Punkt einen Vektor zu, der in die Richtung des stärksten Anstiegs zeigt.
Wenn man an einem Hang steht und in alle Richtungen schaut, zeigt ∇f gerade in die Richtung, in der es am steilsten bergab (bzw bergauf) geht. Den Anstieg selbst erhält man dann durch den Betrag des Vektors.
In Wanderkarten kann man die „Steilheit" an der „Dichte" der Höhenlinien ablesen.

Oder: Ein Körper „fällt" im Gravitationsfeld in die Richtung, in der die Änderung des (Gravitations-)Potentials maximal ist.

Angewendet auf eine Skalarfunktion (hier f: $R^3 \to R$) ist $\vec{\nabla} \cdot f$ (oder kurz ∇f) das Analogon zur 1. Ableitung. $\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\delta f}{\delta x} \\ \frac{\delta f}{\delta y} \\ \frac{\delta f}{\delta z} \end{pmatrix}$ für n = 3.

Im eindimensionalen Fall (n = 1) entspricht dies der 1. Ableitung.

Beispiel:
Sei f (x,y,z) = z + $2 \cdot x^2 - 7 \cdot y \cdot z$.

Dann ist $\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\delta f}{\delta x} \\ \frac{\delta f}{\delta y} \\ \frac{\delta f}{\delta z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ -7z \\ 1-7y \end{pmatrix}$.

Im Punkt P(1/2/3) gilt dann: $\nabla f(1,2,3) = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 \\ -7 \cdot 3 \\ 1-7 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -21 \\ -13 \end{pmatrix}$.

Anmerkung: Es lässt sich auch ein Gradient für Vektorfelder f: $R^n \rightarrow R^m$ - also $f=\begin{pmatrix} f_1(x_1,\ldots,x_n) \\ \ldots \\ f_m(x_1,\ldots,x_n) \end{pmatrix}$ *- definieren, den sogenannten Vektorgradienten. Er hat die Form einer Matrix, und ergibt bei Anwendung auf einen Vektor wiederum einen Vektor. Für n = m = 3 hat er die Form:*

$$\text{grad } f = grad\begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x} & \frac{\delta f_1}{\delta y} & \frac{\delta f_1}{\delta z} \\ \frac{\delta f_2}{\delta x} & \frac{\delta f_2}{\delta y} & \frac{\delta f_2}{\delta z} \\ \frac{\delta f_3}{\delta x} & \frac{\delta f_3}{\delta y} & \frac{\delta f_3}{\delta z} \end{pmatrix}$$

Das ist die Jacobi-Matrix von f, abgekürzt J_f.

Divergenz

Die Divergenz eines Vektorfeldes gibt an jedem Punkt an, wie sehr die Vektoren in einer kleinen Umgebung des Punktes auseinanderstreben. Man erhält als Wert eine skalare Funktion. Sie gibt die Quelldichte an, also ob an einem Punkt etwas hinein- oder herausfließt (positive Divergenz: Quelle, es fließt mehr heraus; negative Divergenz: Senke).
Man definiert für ein Vektorfeld $\vec{V}$

$$\text{div } \vec{V} = \nabla\cdot\vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \frac{\delta V_x}{\delta x} + \frac{\delta V_y}{\delta y} + \frac{\delta V_z}{\delta z} \text{ im dreidimensionalen Fall.}$$

Analoges gilt in anderen Dimensionen.
Beispiel:

Sei $\vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ 2\cdot y \\ 3\cdot z \end{pmatrix}$. Dann ist div $\vec{V} = \nabla\cdot\vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 2\cdot y \\ 3\cdot z \end{pmatrix} = 1+2+3 = 6.$

Jeder Punkt des Feldes $\vec{V}$ stellt eine Quelle dar, denn div $\vec{V}$ ist immer größer Null. Die Feldlinien sind demnach alle nach außen gerichtet.

In quellenfreien Strömungsfeldern (div $\vec{V}$ = 0) ist der Fluss in ein Raumgebiet hinein gleich dem austretenden Fluss, die Feldlinien sind quasi unendlich oder enden auf dem Rand des Feldes (wie beim homogenen el. Feld eines Plattenkondensators), und es gibt keine Feldlinien, die im Strömungsfeld beginnen oder enden.

In elektrischen Feldern stellen Ladungen Q eine Quelle (der Feldlinien) dar:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$ (ρ Ladungsdichte, ϵ_0 el. Feldkonstante)

Im Gegensatz zum elektrischen Feld ist die Divergenz des magnetischen Feldes immer Null, da es keine magnetischen Monopole gibt und die Feldlinien deshalb immer geschlossen sind: div $\vec{B}$ = 0.
Dies sind zwei Maxwellsche Gleichungen.

Rotation

Die Rotation eines Vektorfeldes beschreibt in einem Strömungsfeld – z.B. Geschwindigkeitsfeld in einem Fluss, ob sich Objekte in dem Feld um eine eigene Achse drehen – also nicht, ob sich in dem Feld Wirbel befinden.
Beispielsweise kann sich ein Quietsche-Entchen in einem Fluss treibend um die eigene Achse drehen. Das rührt dann daher, dass die Fließgeschwindigkeiten des Wassers auf beiden Seiten der Ente unterschiedlich sind.
Die Rotation kann aber auch verwendet werden, um Wirbel in einem Feld zu beschreiben. Beispielsweise entstehen Wirbel im elektrischen Feld durch die zeitliche Änderung von magnetischen Feldern: $rot\,\vec{E} = -\frac{\delta \vec{B}}{\delta t}$. Das ist das Induktionsgesetz.
Wirbel in magnetischen Feldern entstehen durch einen Strom oder durch die zeitliche Änderung des elektrischen Feldes: $rot\,\vec{B} = \mu_0 (I + \epsilon_0 \frac{\delta \vec{E}}{\delta t})$.
Das sind die restlichen Maxwellschen Gleichungen.

Anmerkung (s. auch unter Physik → … → Maxwell):
In der Physik gilt für Wirbelfelder: Die Arbeit von einem Punkt zu einem anderen ist wegabhängig. Z.B. würde ein hypothetischer magn. Monopol entlang eines Weges um einen stromdurchflossenen Leiter (also entlang einer Magnetfeldlinie) je nach Orientierung Energie aufnehmen oder verrichten.

Man definiert für ein Vektorfeld $\vec{V}$

$$\text{rot } \vec{V} = \nabla x \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta z} \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\delta V_z}{\delta y} - \frac{\delta V_y}{\delta z} \\ \frac{\delta V_x}{\delta z} - \frac{\delta V_z}{\delta x} \\ \frac{\delta V_y}{\delta x} - \frac{\delta V_x}{\delta y} \end{pmatrix}$$

Man beachte, dass das Vektorprodukt nur im Dreidimensionalen definiert ist.

Ein Beispiel:

Sei $\vec{V} = \begin{pmatrix} x^2 - x \cdot z \\ x \cdot y + z \\ x \cdot y^2 + 3x \end{pmatrix}$.

Dann ist rot $\vec{V} = \nabla x \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta z} \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} x^2 - x \cdot z \\ x \cdot y + z \\ x \cdot y^2 + 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \cdot y - 1 \\ -x - (y^2 + 3) \\ y - 0 \end{pmatrix}$

Im Punkt P(1,2,3) ist demnach

rot $\vec{V}(1,2,3) = \begin{pmatrix} 2x \cdot y - 1 \\ -x - (y^2+3) \\ y - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \\ -1 - (2^2 + 3) \\ 2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ein Objekt im Punkt P wird sich um die Achse $rot\,\vec{V}(1,2,3) = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$ drehen mit der

Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{1}{2} |rot\,\vec{V}(1,2,3)| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3^2 + (-8)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{77}$

Gilt rot $\vec{V}$ = $\vec{0}$, ist das Vektorfeld wirbelfrei (oder konservativ).
Dann existiert ein (skalares) Potential, dessen Gradient das Vektorfeld ist.

Beispiel: Eine Punktladung besitzt ein radialsymmetrisches elektrisches Feld $\vec{E}$. Die Feldlinien sind bei einer positiven Ladung radial nach außen gerichtet (zeigen demnach in Richtung der stärksten Änderung). Jedem Punkt des Raumes lässt sich ein Potential P (bezogen auf einen Bezugspunkt – Einheit Volt) zuordnen.
Dann ist grad P = $\vec{E}$. Das Feld einer Punktladung ist wirbelfrei, also rot $\vec{E}$ = $\vec{0}$.
Insgesamt: rot (grad P) = rot $\vec{E}$ = $\vec{0}$.

Dass das Vektorfeld $\vec{V}$ wirbelfrei ist, ist gleichbedeutend damit, dass die zu $\vec{V}$ gehörige Jacobi-Matrix symmetrisch ist: $rot\,\vec{v} = \vec{0} \leftrightarrow J_{\vec{v}}(x)\, symmetrisch$.

Das folgt unmittelbar aus der Definition der Rotation,
denn dann ist beispielsweise

$$\frac{\delta V_z}{\delta y} - \frac{\delta V_y}{\delta z} = 0 \text{ und damit } \frac{\delta V_z}{\delta y} = \frac{\delta V_y}{\delta z}.$$

Das Gravitationsfeld ist beispielsweise wirbelfrei.

Laplace-Operator

Wendet man den Nabla-Operator zweimal auf eine skalare Funktion an, erhält man den Laplace-Operator Δ:

div (grad f) = Δ f = $\nabla \cdot (\nabla f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$ also die Summe der zweifachen partiellen Ableitungen Im Falle des dreidimensionalen Raumes auch kürzer: $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$.

Im eindimensionalen Fall ist es einfach die 2. Ableitung.

Anwendungsbeispiel: Wellengleichung $\Delta f=\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}+\frac{\delta^2 f}{\delta z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\delta^2 f}{\delta t^2}$ mit der Raumzeitfunktion f = f(t,x,y,z) und c: Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle.
Alternative Darstellung der Wellenfunktion: $\ddot{f}=c^2\Delta f$.

Zusammengesetzte Operatoren

rot (grad f) = $\vec{0}$ → Gradientenfelder sind wirbelfrei.

Div (rot Vektor) = 0 → Rotationsfelder sind quellenfrei.. Es gilt $f_{xy} = f_{yx}$