Klausur

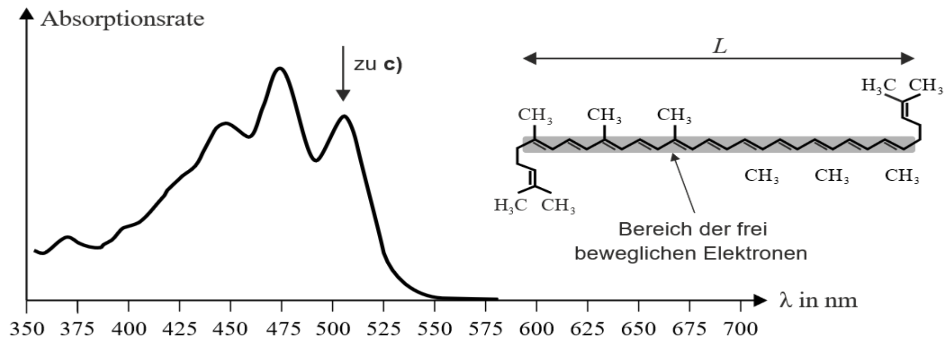
1. a) Beschreiben Sie den durchgeführten Versuch (mit Skizze). *(Na-Lampe)*
Anmerkung: Im Licht einer Na-Dampflampe und einer Glühlampe wird Kochsalz (NaCl) verbrannt. Man beobachtet den Schattenwurf der Flamme im Licht beider Lampen.

   b) Erklären Sie das beobachtete Phänomen mit Hilfe des Bohrschen Atommodells. Geben Sie auch die Bohrschen Postulate wieder.

2. a) Berechnen und zeichnen Sie das Termschema des einfach ionisierten Heliumkerns (mindestens 6 Energieniveaus).

   b) Gibt es Lichtquanten, die beim Rücksprung auf die 3. Bahn sichtbar sind? Geben Sie gegebenenfalls die zugehörigen Wellenlängen an.

3. Die charakteristische rote Farbe von Tomaten beruht hauptsächlich auf der Eigenschaft des Moleküls Lycopen, Licht bestimmter Wellenlängen zu absorbieren. In der folgenden Abbildung sind das Absorptionsspektrum und die Struktur von Lycopen dargestellt. Im grau markierten Bereich (Länge L) können sich 22 Elektronen innerhalb der Molekülkette frei bewegen. Zur Vereinfachung bleibt ihre gegenseitige Wechselwirkung unberücksichtigt.



   a) Begründen Sie, dass man die Energieniveaus eines dieser frei beweglichen Elektronen vereinfacht mithilfe des Modells des eindimensionalen Potentialtopfs mit unendlich hohen Wänden beschreiben kann.

   b) Leiten Sie her, dass im Potentialtopfmodell für die Energie eines Elektrons mit Masse m im n. Quantenzustand gilt $E_n = h^2/(8mL^2) \cdot n^2$

   c) Die 22 frei beweglichen Elektronen besetzen beim nicht angeregten Molekül nach dem Pauli-Prinzip die untersten elf Energieniveaus. Die Anregung des Moleküls, bei dem ein Elektron vom 11. in den 14. Quantenzustand wechselt, ruft das mit einem Pfeil gekennzeichnete Maximum im oben abgebildeten Absorptionsspektrum hervor. Bestimmen Sie daraus die Länge L .

   d) Skizzieren Sie die Wellenfunktion und die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte für ein Elektron im 11. Quantenzustand.

Untersuchen Sie, ob sich ein Elektron im 11. bzw. im 14. Quantenzustand genau in der Mitte des Potentialtopfs aufhalten kann.

e) Erklären Sie mit Hilfe des abgebildeten Absorptionsspektrums, dass das Molekül einen roten Farbeindruck verursacht.

f) Durch Hinzugabe einer chemischen Substanz wird der Bereich, in dem sich die Elektronen frei bewegen können, in Teilbereiche zerlegt.
Erläutern Sie die dadurch hervorgerufene Änderung des Absorptionsspektrums.

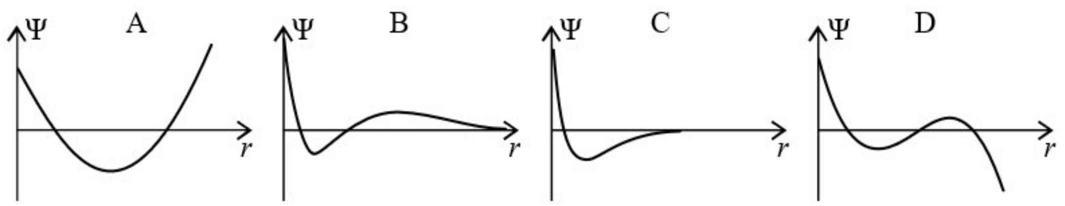
4. Betrachtet wird zunächst ein eindimensionaler unendlich hoher Potentialtopf der Breite l.
Für das Innere des Topfes ($0 < x < l$) ist $E_{pot}(x) = 0$ festgelegt.

Die Wellenfunktion $\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x\right)$ beschreibt den n. Quantenzustand (n=1,2,3,...) eines im Topf gebundenen Elektrons. Hierbei bezeichnet λ_n die Wellenlänge des Elektrons.

a) Beschreiben Sie die quantenphysikalische Bedeutung des Terms $|\Psi_n(x)|^2 \, \Delta x$.

b) Geben Sie ohne Rechnung den Wert des Integrals $\int_0^l |\psi_n(x)|^2 \, dx$ an.

c) Es werden nun radialsymmetrische Zustände des Wasserstoffatoms und zugehörige Wellenfunktionen in ihrer radialen Abhängigkeit betrachtet.
Wählen Sie unter den Diagrammen A bis D den skizzierten Graphen der Wellenfunktion zu n = 2 sowie den zu n = 3 aus und begründen Sie Ihre Entscheidung.



Hinweis: Bedenken Sie das Verhalten von Ψ für r → oo.

Übungsaufgaben

1. a) Nennen Sie die Bohrschen Postulate.
   b) Beschreiben Sie Leistungen und Grenzen des Bohrschen Atommodells.
   c) Erklären Sie, warum Wasserstoff ein Linienspektrum aussendet.
   d) Berechnen Sie die Energieniveaus (Termschema) des zweifach ionisierten Lithiumatoms.
   e) Nennen Sie das Pauli-Prinzip.

2. Ein ruhendes Wasserstoffatom emittiert ein Photon der Wellenlänge $\lambda = 486$ nm.
   a) Berechnen Sie Energie und Impuls des Photons.
   b) Bestimmen Sie die Zustände des H-Atoms vor und nach der Emission des Photons.
   c) Berechnen Sie des Geschwindigkeit des H-Atoms nach der Emission des Photons.
   d) Der Emissionsvorgang dauert 150 ps. Berechnen Sie die Kraft und die Beschleunigung bzgl des H-Atoms.

3. Das Zustandekommen von diskreten Energieniveaus (charakterisiert durch die Quantenzahl n) für ein in der Atomhülle gebundenes Elektron kann am Modell des eindimensionalen, unendlich hohen Potentialtopfs veranschaulicht werden.
   a) Erläutern Sie dieses Modell. Geben Sie die ersten vier Energiestufen für ein in einem Atom eingeschlossenes Elektron ($a = 10^{-10}$ m) an.

   b) Statt Elektronen können auch Protonen oder Neutronen in einem linearen Potentialtopf eingeschlossen werden. Berechnen Sie die ersten drei Energiestufen für Protonen mit $a = 10^{-15}$ m.

4. Negative Myonen, wie sie in der Höhenstrahlung entstehen oder auch künstlich erzeugt werden können, sind Elementarteilchen, welche die Ruhemasse $m_\mu = 207 m_e$ besitzen und eine Elementarladung tragen. Werden sie abgebremst, so können sie bei sehr geringer kinetischer Energie von Atomkernen eingefangen werden.
   a) Berechnen Sie allgemein den Radius der *n.* Quantenbahn des Myons, wenn der einfangende Kern die Kernladungszahl Z hat (der Einfluss der Hüllenelektronen und die Kernmitbewegung sollen unberücksichtigt bleiben).
   b) Geben Sie die Gesamtenergie des Myons auf der n. Quantenbahn an. Vereinfachen Sie diesen Term, indem Sie die Ionisationsenergie 13,6 eV des Wasserstoffatoms einführen.
   c) Berechnen und zeichnen Sie die drei niedrigsten Energieniveaus für das Myon, wenn es von einem Berylliumkern eingefangen wurde. (Für die Zeichnung: 10 keV = 1 cm).
   d) Ein Myon, dessen kinetische Energie vernachlässigt werden kann, wird von einem Berylliumkern eingefangen.
      α) Untersuchen Sie, welche Photonenenergie maximal zu erwarten ist.
      β) Untersuchen Sie, welche Photonenenergie beim Übergang von $n=2$ auf $n=1$ zu erwarten ist. Geben Sie an, in welchem Bereich die elektromagnetische Strahlung liegt.

5. Betrachtet wird zunächst ein eindimensionaler unendlich hoher Potentialtopf der Breite Für das Innere des Topfes ($0<x<l$) ist $E_{pot}(x)=0$ festgelegt.

Die Wellenfunktion $\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x\right)$ beschreibt den n. Quantenzustand (n=1,2,3,...) eines im Topf gebundenen Elektrons. Hierbei bezeichnet λ_n die Wellenlänge des Elektrons.

a) Leiten Sie aus der Randbedingung $\Psi_n(l) = 0$ eine Beziehung zwischen λ_n und l her. (**Hinweis:** $\sin(n \cdot \pi) = 0$)

b) Nehmen Sie an, dass der Grundzustand des Potentialtopfs den Energiewert $E_1 = 1{,}0$ eV besitzt.
Stellen Sie die Energieniveaus E_1 bis E_4 des Potentialtopfs zeichnerisch dar.
Zeichnen Sie ebenfalls die vier niedrigsten Stufen eines Energieniveauschemas zum Wasserstoffatom.
Vergleichen Sie beide Schemata im Hinblick auf das Verhalten der Differenz $E_{n+1} - E_n$ bei zunehmender Quantenzahl n .

6. Betrachten Sie das Wasserstoffatom in erster Näherung als einen linearen Potentialtopf mit der Länge 10^{-10} m. In dem Topf befindet sich ein Elektron. Bestimmen Sie seine Nullpunktsenergie und vergleichen Sie diese Energie mit den Ergebnissen nach dem Bohrschen Atommodell.
Beschreiben Sie mit einer Skizze den Verlauf der Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Elektrons im Zustand n = 2.
Erläutern Sie die Grundannahmen des Modells des linearen Potentialtopfes.

7. Das Licht einer Glühlampe soll durch ein optisches Gitter spektral zerlegt und auf einen Schirm projiziert werden.

a) Schildern Sie an Hand einer Skizze den Versuchsaufbau zur Erzeugung eines Gitterspektrums.

Nun durchquert das Licht vor seiner Zerlegung ein mit Natriumdampf gefülltes Glasgefäß, wobei sich die Natriumatome im Grundzustand befinden. Ein Natriumatom gibt beim Übergang vom ersten angeregten Zustand in den Grundzustand ein Photon mit der Wellenlänge 589 nm ab.

b) Vergleichen Sie das ursprüngliche Spektrum des Glühlampenlichts mit dem Spektrum nach Durchqueren des Natriumdampfs und erklären Sie das Zustandekommen des Unterschieds.

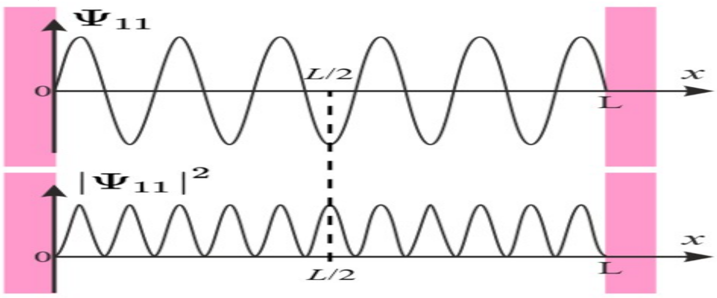
c) Trifft ein Elektron mit der kinetischen Energie 3,0 eV auf ein Natriumatom im Grundzustand, so kann es das Natriumatom anregen.
Berechnen Sie unter der vereinfachenden Annahme, dass das ruhende Natriumatom keinen Rückstoß erhält, die Geschwindigkeit des Elektrons nach dem Stoß für den Fall, dass sich das Natriumatom nach dem Stoß im ersten angeregten Zustand befindet. Erläutern Sie Ihren Ansatz.

Lösung 3.

a)Wenn ein Elektron sich innerhalb der Molekülkette auf einer Strecke der Länge L frei bewegen kann, ist ihm in diesem Bereich die potentielle Energie Null zuzuordnen. Da das

Elektron jedoch fest in diesem Bereich „eingesperrt“ ist, also keine Chance hat diesen Bereich zu verlassen, muss das Potential am Rand dieses Bereichs extrem stark ansteigen. Der Einfachheit halber nimmt man beim linearen Potentialtopf an, dass das Potential am Rand des Bereichs auf eine den Wert „Unendlich“ steigt. Das Elektron bräuchte unendlich viel Energie, um aus dem Topf zu gelangen. Da es diese Energie nicht hat bleibt das Elektron fest im Potentialtopf eingesperrt.
Die dem Elektron zuordenbare Materiewelle wird also an der Topfwand zu 100 reflektiert. Da die Aufenthaltswahrscheinlichkeit w außerhalb des Topfes Null ist, muss die ψ -Funktion, welche den Verlauf der Materiewelle beschreibt auch an den Topfrändern den Wert Null haben (beachte: $w \sim \psi^2$). Somit ergeben sich bei eindimensionalen Potentialtopf Eigenschwingungen (stehende Wellen), wie man sie von einer beidseitig eingespannten Saite kennt. Aus diesen Randbedingungen und dem Zusammenhang der Materiewelle mit der kinetischen Energie eines Elektrons lassen sich dann die diskreten Energiewerte die dem Elektron im Potentialtopf zugeordnet werden können berechnen.
b)Für eine stehende Wellen gilt der folgende Zusammenhang zwischen dem Abstand zweier Knoten der Materiewelle und der Länge L des Potentialtopfes
$L=n \cdot \lambda/2 \Leftrightarrow \lambda=2 \cdot L/n$ mit $n \in N$ (1)
Mit der de-Broglie-Beziehung lässt sich ein Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit des Elektrons und seiner Materiewellenlänge herstellen:
$\lambda=h/p=h/(m \cdot v) \Leftrightarrow v=h/(m \cdot \lambda)$ (2)
Setzt man (1) in (2) ein, so ergibt sich
$v=h/(2 \cdot m \cdot L) \cdot n$ (3)
Für die Gesamtenergie E_n des Elektrons ergibt sich unter der Berücksichtigung der Tatsachen, dass die potentielle Energie innerhalb des Potentialtopfes Null ist und nichtrelativistisch gerechnet werden darf
$E_n=E_{pot}+E_{kin}=0+1/2 \cdot m \cdot v_n^2$ (4)
Setzt man (2) in (4) ein, so ergibt sich für die Energie des Elektrons im n. Quantenzustand
$E_n=h^2/(8 \cdot m \cdot L^2) \cdot n^2$

c)Um das Elektron vom 11. in den 14. Quantenzustand energetisch anzuheben, werden aus dem weißen Licht ein Anteil mit der Wellenlänge 505nm absorbiert. Die entsprechende Photonenenergie ist
$E_{ph}=h \cdot c/\lambda \Rightarrow E_{Ph}=2{,}46eV$
Diese Energie wird dazu verwendet, das Elektron vom 11. auf den 14. Quantenzustand zu heben. Damit hat man die Möglichkeit die Länge des Potentialtopfs zu berechnen:
$\Delta E_{11\rightarrow 14}=E_{Ph} \Leftrightarrow h^2/(8 \cdot m \cdot L^2) \cdot (14^2-11^2)=h \cdot c/\lambda \Rightarrow L=(h \cdot \lambda/(8 \cdot m \cdot c) \cdot (14^2-11^2))^{0,5}$
Einsetzen der gegebenen Werte liefert
$L=3{,}4 \cdot 10^{-9}m$



© Joachim Herz Stiftung
Abb. 3 Potentialtopf
d)Sowohl die Wellenfunktion $\psi 11$ als auch das Quadrat der Wellenfunktion $(\psi 11)|^2$ haben bei x=L/2 ein Maximum, d.h. das Elektron kann sich im 11.Quantenzustand in der Mitte des linearen Potentialtopfes aufhalten. Dagegen ist die Wellenfunktion $\psi 14=0$ bei x=L/2 . Daraus

folgt, dass die Aufenthaltswahrscheinlichkeit in der Mitte des Potentialtopfes auch gleich Null ist.
e)Lycopen absorbiert vorwiegend die grünen Anteile des weißen Lichts. Dies hat zur Folge, dass der reflektierte Anteil des Lichtes einen roten Farbeindruck bewirkt.
f)Verkleinert sich der Teilbereich in dem sich die Elektronen frei bewegen können, so liegt im betrachteten Modell ein engerer Potentialtopf mit L^* vor. Dabei gilt $L^*<L$. Für den Abstand ΔE aufeinanderfolgender Niveaus im linearen Potentialtopf gilt
$\Delta E=h^2/(8\cdot m\cdot L^2)\cdot[(n+1)^2-n^2]$
Da im Ausdruck für ΔE die Länge des Potentialtopfes im Nenner steht, vergrößert sich der Energieunterschied zwischen benachbarten Niveaus. Dadurch verschieben sich die Absorptionslinien in Richtung kleinerer Wellenlängen.