Eine lange Reise

Ich möchte das von Joachim Ringelnatz geschaffene Ameisen-Gedicht

In Hamburg lebten zwei Ameisen,
Die wollten nach Australien reisen.
Bei Altona auf der Chaussee
Da taten ihnen die Beine weh,
Und da verzichteten sie weise
Denn auf den letzten Teil der Reise.

So will man oft und kann doch nicht
Und leistet dann recht gern Verzicht.

zum Anlass nehmen, eine mindestens ebenso bekannte Aufgabe aus der naturwissenschaftlichen Welt vorzustellen:

Eine Ameise bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit c = 1 cm/s auf einem Gummiband der Länge L_0 = 1m. Wird die Ameise das Ende des Gummibandes erreichen?

Diese Frage lässt sich sicher eindeutig mit ja beantworten (und sie schafft es in t = 100 s), denn eine Ameise (bis auf die im Gedicht genannten) ist eifrig. Natürlich schwinden idealisiert niemals ihre Kräfte.

Wie sieht es aber aus, wenn das Gummiband von einem Spaßvogel an beiden Enden angefasst und mit ebenfalls konstanter Geschwindigkeit v = 1 m/s gedehnt wird?
Erreicht die Ameise nun noch das Ende des Gummibandes oder sollte sie die Sinnlosigkeit ihres Tuns einsehend auf die Reise verzichten?

Zur Vereinfachung können wir zuerst schrittweise vorgehen. Wenn die Ameise nach einer Sekunde 1 cm zurückgelegt hat, wird das Gummiband gedehnt und sie hat nicht mehr nur 99 cm sondern 198 cm vor sich. Allerdings hat sie durch die Dehnung ihres bereits zurückgelegten Weges 2 cm (= 1 cm $\cdot \frac{2}{1}$) zurückgelegt. Nun legt sie einen weiteren Zentimeter zurück. Das Gummiband wird gedehnt und ist nun 3 m lang. Sie hat nun bereits 4,5 cm (= 3 cm $\cdot \frac{3}{2}$) zurückgelegt und noch 295,5 cm vor sich.
Wie man sieht, wird das vor der Ameise liegende Stück Gummiband erst einmal immer länger. Entscheidend ist aber, dass der Anteil des zurückgelegten Weges

bezogen auf den Gesamtweg immer größer wird! Denn durch die Dehnung verändert sich der Anteil des zurückgelegten Weges am Gesamtweg nicht, aber die Ameise kommt bei jedem Schritt ja einen Zentimeter voran. Die Frage ist nun, ob dieser Anteil irgendwann 1 erreicht, denn dann ist das Ende des Gummibandes erreicht.
Der Gesamtanteil kann demnach als Summe der Anteile ermittelt werden, die bei jedem Schritt hinzukommen:

1. Schritt: 1 cm von 1 m entspricht $\frac{1}{100}$

2. Schritt: alter Anteil + 1 cm von 2 m $\frac{1}{100} + \frac{1}{200}$

3. Schritt: alter Anteil + 1 cm von 3 m $\frac{1}{100} + \frac{1}{200} + \frac{1}{300}$

…

n. Schritt: alter Anteil + 1 cm von n m $\frac{1}{100} + \frac{1}{200} + \frac{1}{300} + \dots + \frac{1}{n*100}$

Nun klammern wir $\frac{1}{100}$ aus und erhalten als Anteil nach dem n. Schritt:

$$\frac{1}{100} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{100} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

Die Klammer ist die harmonische Reihe, die über alle Grenzen anwächst:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \infty$$

Demnach gibt es ein n, damit die Summe 100 ergibt, denn dann ist der Anteil 1, das Ende des Gummibandes ist erreicht.
Um die Zeit zu ermitteln, die die Ameise benötigt, um das Ende des Gummibandes zu erreichen, muss man nur die Anzahl der Summanden ermitteln, um 100 zu erhalten:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = 100$$

Leider gestaltet sich die Berechnung der harmonischen Reihe sehr schwierig.

Man erhält $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \ln(n) + \gamma + \varepsilon$

γ ist die sogenannte Euler-Mascheroni-Konstante und ungefähr 0,577…
ε ist noch ein Fehlerglied.
Natürlich kann man auch einen Computer für sich arbeiten lassen, der die Summation ausführt.
Man erhält auf diese Weise ungefähr $e^{99,423}$ s ~ 1,5 x 10^{43} s.
Zum Vergleich: Das Weltall ist etwa 4,4 x 10^{17} s alt.
Diese Überlegung wird der Ameise bei ihrer Entscheidung helfen.

Natürlich kann man den ganzen Vorgang verstetigen. Das führt dann zu Differentialgleichungen.

Allgemein gilt für die Ableitung (nach der Zeit) $\dot{f}$ einer Funktion f:

$\dot{f} = \frac{f(t+dt)-f(t)}{dt}$ und deshalb f(t + dt) = f(t) + $\dot{f}(t)$ · dt (*)

Sei v die Geschwindigkeit, mit der das Gummiband gedehnt wird.
Dann ist die Länge L des Gummibandes zum Zeitpunkt t:

$L(t) = L_0 + v \cdot t$ mit L_0 Anfangslänge des Gummibandes

Dann gilt (wegen *) für eine infinitesimale Dehnung des Gummibandes:

$L(t + dt) = L(t) + \dot{L}(t) \cdot dt = L(t) + v \cdot dt$

Also wird das Band in der Zeit dt um den Faktor $\frac{L(t+dt)}{L(t)} = 1 + \frac{v}{L(t)} dt$ gestreckt.

Sei c die Geschwindigkeit der Ameise und s(t) der von der Ameise zurückgelegte Weg zum Zeitpunkt t. Dann gilt ebenso (wegen *):

$s(t + dt) = s(t) + \dot{s}(t) \cdot dt$

Zu berücksichtigen ist nun, dass in der Zeit dt einerseits der Weg der Ameise sich aufgrund der Geschwindigkeit c der Ameise vergrößert – also s(t) + c · dt – andererseits diese Wegänderung der Ausdehnung des Bandes ausgesetzt ist – also um den Faktor $1 + \frac{v}{L(t)}$ dt gestreckt wird. Deshalb gilt:

$$s(t + dt) = s(t) + \dot{s}(t) \cdot dt = (s(t) + c \cdot dt)\ ) \cdot \left(1 + \frac{v}{L(t)} dt \right)$$

$$= s(t) + \left(c + \frac{v}{L(t)} \cdot s(t)\right) \cdot dt + c \cdot \frac{v}{L(t)} (dt)^2$$

Vernachlässigt man den Term mit dem Faktor $(dt)^2$, erhält man zusammengefasst

$$\frac{s(t+dt)-s(t)}{dt} = \dot{s}(t) = c + \frac{v}{L(t)} \cdot s(t) \qquad (**)$$

Eine Lösung dieser Differentialgleichung drängt sich nicht sofort auf.
Wie oben bereits erwähnt, betrachtet man besser den Anteil des bereits zurückgelegten Wegs. Dieser Anteil wird durch die Funktion

$$\sigma(t) = \frac{s(t)}{L(t)} \quad (***)$$ beschrieben.

Dann ist $s(t) = \sigma(t) \cdot L(t)$ und damit $\dot{s}(t) = \dot{\sigma}(t) \cdot L(t) + \sigma(t) \cdot \dot{L}(t)$
Einsetzen in (**) und mit (***)

$$\dot{\sigma}(t) \cdot L(t) + \sigma(t) \cdot \dot{L}(t) = c + \frac{v}{L(t)} \cdot s(t) = c + \frac{v}{L(t)} \cdot \sigma(t) \cdot L(t)$$

Zusammenfassen und mit $\dot{L}(t) = v$ erhält man

$$\dot{\sigma}(t) \cdot L(t) + \sigma(t) \cdot v = c + \sigma(t) \cdot v \text{ und weiter}$$

$$\dot{\sigma}(t) = \frac{c}{L(t)} = \frac{c}{L_0+vt} = \frac{c}{L_0} \cdot \frac{1}{1+\frac{v}{L_0}t}$$

Diese Differentialgleichung lässt sich leicht lösen:

$$\sigma(t) = \frac{c}{v} \cdot \ln(1 + \frac{v}{L_0} \cdot t) + \text{const}$$

Die Konstante const erhält man aus der Nebenbedingung σ(0) = 0, denn zum Zeitpunkt t = 0 ist der von der Ameise zurückgelegte Weganteil 0.
Eingesetzt in die Funktion σ: $\sigma(0) = \frac{c}{v} \cdot \ln(1 + \frac{v}{L_0} \cdot 0) + const = 0 \rightarrow const = 0.$

Wie bereits erwähnt, erreicht die Ameise das Bandende für $\sigma(t) = 1$.
Berechnen wir die Zeit: t

$$\frac{c}{v} \cdot \ln(1 + \frac{v}{L_0} \cdot t) = 1 \rightarrow 1 + \frac{v}{L_0} \cdot t = e^{\frac{v}{c}} \rightarrow \mathbf{t = \frac{L_0}{v} (e^{\frac{v}{c}} - 1)}$$

Setzen wir nun unsere Werte ein:

$$t = \frac{1}{1} \cdot (e^{\frac{1}{0,01}} - 1) = e^{100} -1 \sim 2,69 \times 10^{43} \text{ Sekunden}$$

Es dauert also etwa $2,69 \times 10^{43}$ Sekunden bis die Ameise das Bandende erreicht. Die geringe Abweichung zu der 1. Lösung folgt aus der schrittweisen Vorgehensweise.