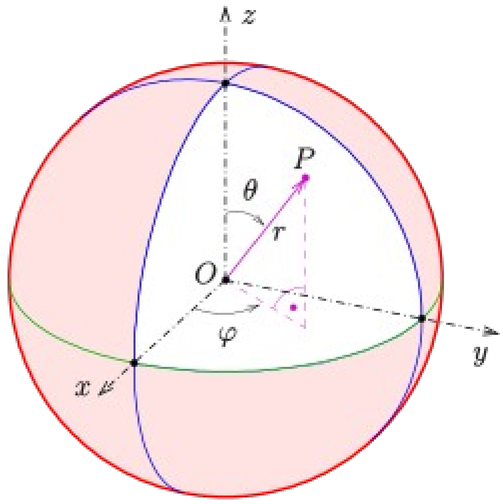
Kugelkoordinaten



Ein Kugelkoordinatensystem im dreidimensionalen euklidischen Raum wird festgelegt durch die Wahl

eines Zentrums O (Ursprung),

einer gerichteten Gerade durch das Zentrum (Polachse), die die Polrichtung (oder Zenitrichtung) angibt, und durch diese festgelegt die Äquatorebene, die orthogonal zur Polrichtung durch das Zentrum verläuft, und

einer Bezugsrichtung in der Äquatorebene.

Oft wird gleichzeitig ein kartesisches Koordinatensystem verwendet. Dann wird typischerweise der Ursprung des kartesischen Koordinatensystems als Zentrum gewählt, die z-Achse als Polachse (und damit die x-y-Ebene als Äquatorebene) und die x-Achse als Bezugsrichtung.

In der Version der Kugelkoordinaten, die in der Mathematik und in der Physik üblich ist, wird ein Punkt P durch die folgenden drei Koordinaten festgelegt:

r der Radius, ist der Abstand des Punktes P von O , hiermit wird die Kugeloberfläche festgelegt, auf der sich P befindet.

θ oder ϑ der Polarwinkel oder Poldistanzwinkel, ist der Winkel zwischen der Polrichtung und der Strecke O P , gezählt von 0 bis π (0° bis 180°), hierdurch wird der Ort des Punktes P auf eine Kreislinie der Kugeloberfläche festgelegt. -> Breitengrad

ϕ oder φ der Azimutwinkel, ist der Winkel zwischen der Bezugsrichtung und der Orthogonalprojektion der Strecke O P , gezählt von − π bis π (−180° bis 180°) oder von 0 bis 2 π (0° bis 360°) gegen den Uhrzeigersinn. Hierdurch wird der Ort des Punktes P auf der Kreislinie eindeutig definiert. -> Längengrad

Umrechnungen

Mathematisch gesprochen, wird jedem Koordinatentripel (r , θ , ϕ) ein Punkt im dreidimensionalen euklidischen Raum zugeordnet (Parametrisierung). Wählt man ein kartesisches Koordinatensystem wie oben, so kann die Zuordnung durch die folgenden Gleichungen beschrieben werden:

$x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi$

$y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi$

$z = r \cdot \cos\theta$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \arccos \frac{z}{r} = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\varphi = \operatorname{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & \text{, wenn } x > 0, \\ \operatorname{sgn}(y)\frac{\pi}{2} & \text{, wenn } x = 0, \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & \text{, wenn } x < 0 \wedge y \geq 0, \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \pi & \text{, wenn } x < 0 \wedge y < 0. \end{cases}$$